



## Promotion IUF 2014 Rapport d'activité (2014 - 2019)

- Nom : **DELARUE**
- Prénom : **FRANCOIS**
- Date de naissance : **12 Octobre 1976**
- Grade : Professeur des Universités
- Discipline principale : Mathématiques
- CNU : **26**
- Université ou établissement d'appartenance : Université Côte d'Azur (ex Université Nice Sophia Antipolis)
- Unité de recherche d'appartenance : Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR CNRS 7351
- Catégorie : Junior

### THEMATIQUE DE RECHERCHE :

Ma recherche porte, de façon générale, sur l'analyse stochastique et le lien avec les équations aux dérivées partielles. Cela inclut le contrôle stochastique et les modèles à champ moyen, dont la théorie des jeux à champ moyen, à laquelle j'ai consacré la majeure partie de mon activité de recherche ces dernières années. Cela couvre également plusieurs aspects des modèles à champ moyen en lien avec d'autres directions de recherche, parmi lesquelles les problèmes à frontière libre et les trajectoires rugueuses.

### RÉSUMÉ SCIENTIFIQUE À PROPOS DE LA RÉALISATION DU PROJET DE RECHERCHE IUF (2 pages maximum) :

*Avancées majeures / État d'achèvement / réorientations éventuelles au cours des 5 ans / Perspectives ouvertes par le travail réalisé*

Mon sujet de recherche IUF s'articulait autour de deux directions : d'une part, la théorie des jeux à champ moyen, qui en était la partie principale, et, d'autre part, l'optimisation en milieu aléatoire et les trajectoires rugueuses en lien avec les travaux récents sur les équations aux dérivées partielles stochastiques comme l'équation dite de KPZ.

Au cours des cinq années écoulées, je me suis surtout focalisé sur la première direction, sur laquelle j'ai obtenu plusieurs résultats importants et sur laquelle je continue à travailler avec des perspectives nouvelles qui ne figuraient pas dans mon projet initial. Pour ce qui est de la deuxième direction, je m'y suis également attaché, mais sous une forme qui a évolué sensiblement différemment de celle initialement envisagée : après avoir proposé, en collaboration avec R. Diel (Nice) et à partir de l'approche de l'équation de KPZ due à Hairer, une construction de la mesure polymère associée à un bruit blanc espace temps, je me suis davantage intéressé à l'optimisation en milieu aléatoire dans le cadre des jeux à champ moyen soumis à un bruit commun ; par ailleurs, j'ai continué, par la suite, à travailler sur la théorie des trajectoires rugueuses, qui sous-tend les travaux fondateurs de Hairer sur l'équation de KPZ, mais en lien avec les modèles de champ moyen. Je détaille l'ensemble de ces éléments dans la suite de ce résumé scientifique.

La théorie des jeux à champ moyen a été initiée par deux groupes indépendants au milieu des années 2000 : Lasry et Lions, en France, et Huang, Caines et Malhamé, au Canada. A la fin des 2000, P.L. Lions a donné, dans le cadre de sa chaire au Collège de France, une série de cours sur le sujet qui ont contribué à en assurer l'essor. De mon côté, j'ai commencé à m'y intéresser, en collaboration avec R. Carmona (Princeton), deux ou trois ans avant ma promotion à l'IUF. Nous nous étions principalement consacrés à l'analyse d'une approche probabiliste, fondée sur la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades de type McKean-Vlasov, c'est-à-dire avec dépendance champ moyen, et à la comparaison entre théorie des jeux à champ moyen et théorie du contrôle champ moyen (aussi appelée théorie du contrôle d'équations de type McKean-Vlasov).

Au cours de ma délégation IUF, je me suis focalisé sur l'étude d'autres approches de la théorie des jeux à champ moyen, dont celle fondée sur l'équation maîtresse ("master equation" en anglais), introduite par Lions dans ses cours au collège de France. L'équation maîtresse est une équation aux dérivées partielles sur l'espace des mesures de probabilité (sur l'espace ambiant), dont les caractéristiques sont précisément les solutions du système "Fokker-Planck/Hamilton-Jacobi-Bellman" usuellement utilisé pour décrire les équilibres du jeu à champ moyen. Avec J.F. Chassagneux (Paris Diderot) et D. Crisan (Imperial), j'ai proposé une approche probabiliste pour montrer l'existence de solutions classiques à cette équation maîtresse sous des hypothèses de monotonie ; cet article de plus de 100 pages est à paraître aux "Memoirs of the AMS". Suite à ce travail, j'ai entamé une collaboration avec P. Cardaliaguet (Dauphine), J.M. Lasry (Dauphine) et P.L. Lions (Dauphine et Collège de France), dans laquelle nous avons montré l'existence de solutions classiques à l'équation maîtresse, mais pour des jeux à champ moyen soumis à un bruit commun, c'est-à-dire dont les équilibres sont eux-mêmes forcés par un aléa extérieur. A cette occasion, nous avons introduit une version stochastique (alors nouvelle) du système "Fokker-Planck/Hamilton-Jacobi-Bellman". Nous avons également montré, ce qui répondait à une question ouverte dans le domaine, comment les solutions classiques de l'équation maîtresse pouvaient être utilisées pour établir la convergence des équilibres du jeu à nombre fini de joueurs vers les solutions du jeu à champ moyen. L'ensemble de ces travaux, qui sont certainement considérés comme importants dans le sujet, ont été publiés sous la forme d'un livre dans la collection "Annals of Maths Studies". Ils ont ouvert différentes perspectives, dont une étude raffinée de la vitesse de convergence des équilibres du jeu à nombre fini de joueurs vers les solutions du jeu à champ moyen ; j'ai par exemple publié, avec D. Lacker (Columbia) et K. Ramanan (Brown), deux articles dans "Annals of Probability" et "Electronic Journal of Probability" sur les déviations et fluctuations dans les jeux à champ moyen.

Comme expliqué ci-dessus, j'ai consacré une partie de ma recherche à l'étude des jeux à champ moyen soumis à un bruit commun, l'ajout d'un bruit commun visant à traduire le fait que les joueurs sont soumis à des bruits corrélés au travers d'un même aléa commun. A cet égard, l'impact du bruit commun sur les solutions soulèvent de nombreuses questions. Dans un travail en collaboration avec R. Carmona et D. Lacker, publié dans "Annals of Probability", je me suis par exemple attaché à l'analyse d'équilibres faibles qui, à l'image des solutions faibles d'équations différentielles stochastiques, intègrent un aléa supplémentaire en plus de l'aléa porté par le bruit commun. Toujours inspiré par la théorie des équations différentielles stochastiques, j'ai également cherché à comprendre dans quelle mesure le bruit commun permettait de lisser le jeu à champ moyen et, au bout du compte, de restaurer l'unicité (en dehors des conditions usuelles de monotonie). A cet égard, un des mes étudiants de thèse, R. Foguen, a montré, dans le contexte linéaire-quadratique, qu'un bruit commun standard permettait effectivement de garantir l'unicité des équilibres. J'ai, par la suite, étendu ce résultat à des cas plus généraux en utilisant des bruits communs de dimension infinie. Plus récemment, en collaboration avec E. Bayraktar (Michigan), A. Cecchin (Nice, post-doc ANR sous ma direction) et A. Cohen (Michigan), j'ai établi un résultat similaire pour les jeux à espace d'état fini, en utilisant une forme fini-dimensionnelle de bruit commun. J'insiste sur le fait que ces derniers résultats n'étaient pas attendus lors de l'écriture de mon projet de recherche. Ils ouvrent plusieurs directions.

Par exemple, à l'heure actuelle, une de mes perspectives de recherche vise à faire tendre, après restauration de l'unicité, l'intensité du bruit commun vers zéro. Clairement, l'espoir est d'obtenir d'éventuels principes de sélection pour les jeux sans bruit commun pour lesquels il n'y a pas d'unicité ; pour autant, cette question est certainement très difficile. J'ai obtenu un premier résultat partiel avec mon étudiant R. Foguen : nous avons établi un principe de sélection dans un cas proche du linéaire-quadratique ; le cas échéant, la sélection ne se fait qu'au travers de la moyenne de l'équilibre et, de façon concomitante, l'équation maîtresse mentionnée précédemment se réduit à une équation hyperbolique non-linéaire pour laquelle le principe de sélection des équilibres est associé à la sélection, par viscosité évanescence, de la solution entropique. Le cas général est beaucoup plus difficile, l'équation maîtresse se lisant alors comme un système d'équations hyperboliques non-linéaires. Néanmoins, dans un travail en cours avec A. Cecchin, nous proposons l'étude d'un cas intermédiaire, dit potentiel ; dans ce contexte, le jeu à champ moyen est associé à un problème variationnel et, précisément, nous montrons que les minimiseurs de l'énergie sous-jacente sont les seuls équilibres à pouvoir être sélectionnés lorsque le bruit commun tend vers 0. Ce dernier travail ne concerne que des modèles à espace d'états fini, mais notre objectif est de traiter le cas continu de façon similaire.

J'insiste sur le fait qu'une partie des résultats effectués sur le sujet au cours de la délégation IUF ont été repris dans un ouvrage en deux volumes, co-écrit avec R. Carmona. Cet ouvrage vient de recevoir le prix Doob de l'American Mathematical Society.

En parallèle, j'ai développé d'autres travaux sur les modèles à champ moyen. Par exemple, en collaboration avec I. Bailleul (Rennes) et R. Catellier (Nice), j'ai proposé une approche systématique pour aborder les équations champ moyen rugueuses. Ces travaux récents s'appuient sur la technologie développée pour les jeux à champ moyen et ouvrent des perspectives dans le domaine. Dans un autre travail soumis en 2019, en collaboration avec S. Naddochiy (Chicago) et M. Shkolnikov (Princeton), nous avons étudié l'unicité des solutions à l'équation de Stefan 1d avec surfusion en utilisant une interprétation probabiliste. Ce résultat d'unicité répond à des questions laissées ouvertes dans la littérature, dont certains travaux antérieurs sur la modélisation de réseaux neuronaux que j'avais cités dans mon projet IUF.

## **PRODUCTION SCIENTIFIQUE DE LA PÉRIODE 2014-2019 :**

*Publications scientifiques / Communications orales invitées / Ouvrages / Brevets /  
Autres réalisations*

### *Articles*

- I. Bailleul, R. Catellier, F. Delarue. Propagation of chaos for mean field rough differential equations. In revision in *Annals of Probability*.
- I. Bailleul, R. Catellier, F. Delarue. Mean field rough differential equations. To appear in *Electron. J. Probab.*
- F. Delarue, F. Lagoutière, N. Vauchelet. Convergence analysis of upwind type schemes for the aggregation equation with pointy potential. To appear in *Annales de l'Institut Henri Lebesgue*.
- F. Delarue, D. Lacker, K. Ramaman. From the master equation to mean field game limit theory: Large deviations and concentration of measure. To appear in *Annals of Probability*.
- J.F. Chassagneux, D. Crisan, F. Delarue. A Probabilistic approach to classical solutions of the master equation for large population equilibria. To appear in *Memoirs of the AMS*.
- F. Delarue, R. Foguen Tchuendom. Selection of equilibria in a linear quadratic mean-field game. *Stochastic Process. Appl.* 130 (2020), no. 2, 1000-1040.

- F. Delarue, D. Lacker, K. Ramaman. From the master equation to mean field game limit theory: A central limit theorem. *Electron. J. Probab.* 24 (2019), Paper No. 51, 54 pp.
- F. Delarue. Restoring Uniqueness to Mean-Field Games by Randomizing the Equilibria. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.* 7 (2019), no. 4, 598-678.
- J.F. Chassagneux, D. Crisan, F. Delarue. Numerical methods for FBSDEs. *Annals of Applied Probability*, 29 (2019), no. 3, 1640-1684
- F. Delarue, F. Lagoutière, N. Vauchelet. Convergence order of upwind type schemes for transport equations with discontinuous coefficients. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2017, 108, 918-951.
- R. Carmona, F. Delarue, D. Lacker. Mean field games of timing and models for bank runs. 2017, *Applied Mathematics & Optimization*, 76, 217-260.
- F. Delarue. Mean field games: A toy model on an Erdős-Renyi graph. *ESAIM: PROCEEDINGS AND SURVEYS*, 2017, Vol. 60, p. 1-26.
- R. Carmona, F. Delarue, D. Lacker. Mean field games with common noise. *Annals of Probability*, 2016, 44, 3740-3803.
- F. Delarue, R. Diel. Roland Rough paths and 1d SDE with a time dependent distributional drift: application to polymers. *Probab. Theory Related Fields* 165 (2016), no. 1-2, 1-63.
- F. Delarue, S. Menozzi. E. Nualart. The Landau equation for Maxwellian molecules and the Brownian motion on  $SO_N(\mathbb{R})$ . *Electron. J. Probab.* 20, 2015, no. 92, 39 pp.
- R. Carmona, F. Delarue. Forward-backward stochastic differential equations and controlled McKean-Vlasov dynamics. *Ann. Probab.* 43, 2015, no. 5, 2647-2700.
- F. Delarue, J. Inglis, S. Rubenthaler, E. Tanré. Etienne Global solvability of a networked integrate-and-fire model of McKean-Vlasov type. *Ann. Appl. Probab.* 25 (2015), no. 4, 2096-2133.
- F. Delarue, J. Inglis, S. Rubenthaler, E. Tanré. Particle systems with a singular mean-field self-excitation. Application to neuronal networks. *Stochastic Process. Appl.* 125 (2015), no. 6, 2451-2492.
- R. Carmona, F. Delarue. The master equation for large population equilibria. *Stochastic analysis and applications 2014*, 77-128, Springer Proc. Math. Stat., 100, Springer, Cham, 2014.
- F. Comets, F. Delarue, R. Schott. Information transmission under random emission constraints. *Combin. Probab. Comput.* 23 2014, no. 6, 973-1009.
- F. Delarue, F. Flandoli, D. Vincenzi. Noise prevents collapse of Vlasov-Poisson point charges. *Comm. Pure Appl. Math.* 67 2014, no. 10, 1700-1736.
- F. Delarue, F. Flandoli. The transition point in the zero noise limit for a 1D Peano example. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 34 (2014), no. 10, 4071-4083.

## Ouvrages

- P. Cardaliaguet, F. Delarue, J.-M. Lasry, P.-L. Lions. The master equation and the convergence problem in mean field games. *Annals of Mathematics Studies*, 201. Princeton University Press, Princeton, NJ,
- R. Carmona, F. Delarue. Probabilistic Theory of Mean Field Games: vol. I, Mean Field FBSDEs, book series in Probability Theory and Stochastic Modelling, Springer Verlag, 2018.
- R. Carmona, F. Delarue. Probabilistic Theory of Mean Field Games: vol. II, Mean Field Games book series in Probability Theory and Stochastic Modelling, Springer Verlag, 2018.

## *Edition de volumes*

- Co-éditeur des actes du CEMRACS 2017—numerical methods for stochastic models: control, uncertainty quantification, mean-field, ESAIM Proc. Surveys, 65, EDP Sci., Les Ulis, 2019.
- Co-éditeur, avec A. Bensoussan, de deux numéros de la revue Applied Mathematics and Optimization sur les jeux à champ moyen, 2016 et 2017.

## *Proceedings*

- P. Grazieschi, M. Leocata, C. Mascart, J. Chevallier, Julien, F. Delarue, E. Tanré, Etienne Network of interacting neurons with random synaptic weights. CEMRACS 2017—numerical methods for stochastic models: control, uncertainty quantification, mean-field, 445-475, ESAIM Proc. Surveys, 65, EDP Sci., Les Ulis, 2019.
- B. Fabrèges, H. Hivert, K. Le Balc'h, S. Martel, F. Delarue, François, F. Lagoutière, N. Vauchelet, Nicolas Numerical schemes for the aggregation equation with pointy potentials. CEMRACS 2017—numerical methods for stochastic models: control, uncertainty quantification, mean-field, 384-400, ESAIM Proc. Surveys, 65, EDP Sci., Les Ulis, 2019.
- A. Angiuli, C. Graves, H. Li, Houzhi, J.F. Chassagneux, F. Delarue, R. Carmona. Numerical probabilistic approach to MFG. CEMRACS 2017—numerical methods for stochastic models: control, uncertainty quantification, mean-field, 84-113, ESAIM Proc. Surveys, 65, EDP Sci., Les Ulis, 2019.

## *Communications orales principales*

AMS Short Course on mean field games (Denver, 2020), Conference on mean field games (Levico, Italie, 2019), CIME Summer school on mean field games (Cetraro, Italie, 2019), Congrès SMAI (Orateur plénier, Lorient, 2019), Toulouse Winter School on Calculus of Variations (Toulouse, 2019), Bologne Winter School on Mean Field Games and SPDEs (Bologne, Italie, 2019), Mean field games and energy markets (conference, London, 2018), Oxford (séminaire, 2018), Berlin (séminaire, 2018, 2014), BSDE and stochastic analysis (conference, Edinburgh, 2017), Mean field games (IPAM, 2h cours, Los Angeles, 2017), Mean field games (conférence, Rome, 2017), Ki-Net conference (conférence, Maryland, 2017), Princeton (seminaire, 2017, 2016, 2014, 2011), Ann-Arbor (seminaire, 2017), Braga (3h cours, 2016), Brown (séminaire, 2016), Columbia (séminaire, 2016), Mean field game (conférence, Paris, 2015), EMS Amsterdam (conférence, session parallèle, 2015), SPA Oxford (conférence, session parallèle, 2015), Mean field games (conférence, Fields Toronto, 2013), LSE London (seminaire, 2015), congrès franco-roumain (conférence, Lyon, 2014), KTH Stockholm (seminaire, 2012), EPFL (seminaire, 2012).

## **ENCADREMENT DOCTORAL : Direction de thèses**

Julien Chevallier. Co-direction avec Patricia Reynaud-Bouret. Soutenance en Septembre 2016. Sujet de la thèse : “Modelling large neural networks via Hawkes processes”. Julien Chevallier est aujourd’hui MCF à l’Université Grenoble Alpes.

Rinel Foguen. Direction pleine. Soutenance en Juillet 2018. Sujet de la thèse : “Exemples de restauration d’unicité et de sélection d’équilibres dans les jeux à champ moyen”. Rinel Foguen est aujourd’hui post-doctorant à l’Ecole Polytechnique de Montréal.

Victor Marx. Direction pleine. Soutenance en Octobre 2019. Sujet de la thèse : “Diffusive processes on the Wasserstein space: Coalescing models, Regularization properties and McKean-Vlasov equations”. Victor Marx est aujourd’hui post-doctorant à l’Université de Leipzig.

Athanasios Vasileiadis. Direction pleine. Thèse débutée en Octobre 2019.

### **AUTRES AVANCEES SIGNIFICATIVES AU COURS DE LA PÉRIODE :**

### **PRIX ET DISTINCTIONS SCIENTIFIQUES OBTENUS AU COURS DE LA PÉRIODE (indiquer les dates) :**

Prix Doob (American Mathematical Society) pour le livre en deux volumes : Probabilistic of Mean Field Games with Applications, co-écrit avec R. Carmona. Prix annoncé en Novembre 2019 et décerné en Janvier 2020 lors du congrès de l’AMS.

### **AUTRES OBSERVATIONS :**

Co-éditeur en chef (avec Peter Friz) de la revue Annals of Applied Probability. Depuis Janvier 2019.

Editeur associé : Annales de l’Institut Henri Poincaré (PS) de 2014 à 2018, Annals of Applied Probability 2013 à 2018, Applied Mathematics and Optimization de 2014 à 2018.

*Acceptez-vous la mise en ligne de ce document sur le site internet de l’IUF : Oui*